**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра МО ЭВМ**

отчет

**по лабораторной работе №1**

**по дисциплине «Методы оптимизации»**

Тема:**Методы безусловной минимизации функций**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 8382 |  | Мирончик П.Д. |
| Преподаватель |  | Мальцева Н.В. |

Санкт-Петербург

2021

# Цель работы

1. Решение задачи безусловной минимизации функций с помощью стандартной программы.

2. Исследование и объяснение полученных результатов.

# Постановка задачи

13. Минимизировать функцию

F(x1,x2,a) = (x2 - x12)2 + a(x1 - 1)2 с точностью до 10-5 (abs(F(x1k,x2k,a) - F(x1\*,x2\*,a)) < 10-5) градиентными методами - методом с постоянным шагом и методом наискорейшего спуска.

Оценить скорость и порядок сходимости обоих методов. Исследовать эффективность метода с постоянным шагом в зависимости от начальной точки и величины шага и сравнить его с методом наискорейшего спуска.

Параметр a положить равным a = 10.

# Теоретические сведения

Пусть дана функция и точка начального приближения . Необходимо минимизировать функцию , т.е. найти . Сущность методов спуска заключается в построении релаксационной последовательности , т.е. последовательности, удовлетворяющей условию .

Введем величину и основные определения:

1. Предел называется порядком сходимости метода.

2. Последовательность сходится к линейно, если .

3. Последовательность сходится к сверхлинейно, если , где .

4. Последовательность сходится к с квадратичной скоростью, если при .

5. Функция на удовлетворяет условиям Липшица, если .

6. Если функция удовлетворяет условиям Липшица и существует непрерывный градиент , удовлетворяющий условиям Липшица, то .

7. Функция называется сильно выпуклой с параметром , если

8. Функция вида , где - симметричная положительно определенная матрица, называется квадратичной.

9. Рассмотрим поверхность . Обозначим , . Тогда величина называется числом обусловленности точки локального минимума. Функции, для которых , называют овражными.

**Градиентные методы** оптимизации основаны на построении последовательности по следующему правилу: ( - градиент функции ).

Если то можно выбрать так, чтобы .

Если , то - стационарная точка, которая должна быть исследована на глобальный минимум.

Все градиентные методы отличаются друг от друга способом выбора .

**Метод наискорейшего спуска.**

На луче вводится функция . Величина шага выбирается как .

Для квадратичной функции метод наискорейшего спуска сходится с линейной скоростью; порядок сходимости равен 1. В общем случае верна следующая теорема:

**Теорема 1**. Рассмотрим задачу . Пусть и сильно выпукла с параметром . Тогда при любом начальном приближении для , построенной по методу наискорейшего спуска справедливо:

1.

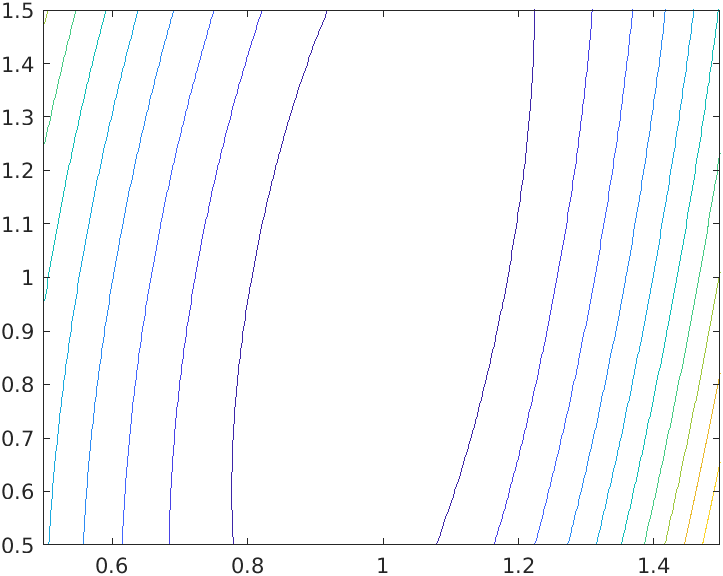
2. , где , L - постоянная Липшица.

**Метод с постоянным шагом.**

В этом методе полагается . Метод является простым в реализации, однако имеет проблемы со сходимостью

# Экспериментальные исследования методов

Точкой глобального минимума функции F является точка и . Построим при помощи Matlab изолинии функции F в окрестности точки (1,1):



Видно, что изолинии по своему виду близки к эллипсам. Таким образом, в качестве начальных приближений можно выбрать три точки, равноудалённые от x\*: .

**Метод наискорейшего спуска.**

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | 1.107419 | 1.522557 | 0.203111 | 9 |  |  |
| 10 | 1.023722 | 1.225147 | 0.037006 | 11 |  |  |
| 20 | 1.008847 | 1.085324 | 0.005346 | 14 |  |  |
| 30 | 1.003311 | 1.032135 | 0.00076 | 13 |  |  |
| 40 | 1.001243 | 1.012076 | 0.000107 | 12 | 1.021829 | 0.822186 |
| 41 | 1.002181 | 1.010747 | 8.8e-05 | 11 | 1.023051 | 0.822098 |
| 42 | 1.001021 | 1.009927 | 7.3e-05 | 13 | 1.020892 | 0.822142 |
| 43 | 1.001793 | 1.008835 | 6,00E-05 | 11 | 1.022056 | 0.822083 |
| 44 | 1.000839 | 1.008161 | 4.9e-05 | 12 | 1.020021 | 0.82212 |
| 45 | 1.001474 | 1.007263 | 4,00E-05 | 11 | 1.021163 | 0.822055 |
| 46 | 1.00069 | 1.006709 | 3.3e-05 | 12 | 1.019219 | 0.822085 |
| 47 | 1.001212 | 1.00597 | 2.7e-05 | 11 | 1.020358 | 0.822032 |
| 48 | 1.000567 | 1.005515 | 2.2e-05 | 12 | 1.01847 | 0.822065 |
| 49 | 1.000996 | 1.004908 | 1.8e-05 | 11 | 1.019573 | 0.82202 |
| 50 | 1.000466 | 1.004533 | 1.5e-05 | 12 | 1.017823 | 0.822045 |
| 51 | 1.000819 | 1.004034 | 1.2e-05 | 11 | 1.018862 | 0.822013 |
| 52 | 1.000383 | 1.003726 | 1,00E-05 | 12 | 1.01718 | 0.822032 |
| 53 | 1.000673 | 1.003316 | 8,00E-06 | 11 | 1.018193 | 0.822 |

вычислено 643 значения F

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | 2.54247 | 9.228765 | 31.435213 | 11 |  |  |
| 10 | 0.998139 | 1.434334 | 0.191924 | 16 |  |  |
| 18 | 0.999779 | 1.056321 | 0.003223 | 15 | 1.179745 | 0.604224 |
| 19 | 1.008665 | 1.051962 | 0.001945 | 12 | 1.023238 | 0.603559 |
| 20 | 0.999861 | 1.034 | 0.001175 | 15 | 1.148753 | 0.604159 |
| 21 | 1.005225 | 1.03137 | 0.00071 | 12 | 1.019765 | 0.603815 |
| 22 | 0.99992 | 1.020557 | 0.000429 | 14 | 1.126536 | 0.604937 |
| 23 | 1.003155 | 1.01897 | 0.00026 | 11 | 1.017173 | 0.604721 |
| 24 | 0.99994 | 1.012384 | 0.000156 | 15 | 1.111378 | 0.60253 |
| 25 | 1.0019 | 1.011427 | 9.4e-05 | 12 | 1.015212 | 0.602416 |
| 26 | 0.999967 | 1.007476 | 5.7e-05 | 14 | 1.098226 | 0.603839 |
| 27 | 1.001147 | 1.006899 | 3.4e-05 | 12 | 1.013623 | 0.6038 |
| 28 | 0.99998 | 1.004514 | 2.1e-05 | 15 | 1.088221 | 0.603903 |
| 29 | 1.000693 | 1.004166 | 1.3e-05 | 12 | 1.01233 | 0.603836 |
| 30 | 0.999989 | 1.00273 | 8,00E-06 | 17 | 1.079803 | 0.604729 |

вычислено 412 значения F.

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | 2.249932 | 7.915624 | 23.765363 | 10 |  |  |
| 10 | 1.491357 | 2.654283 | 2.599333 | 16 |  |  |
| 20 | 1.037571 | 1.112745 | 0.015426 | 15 | 1.319786 | 0.559362 |
| 21 | 1.015189 | 1.110051 | 0.008618 | 10 | 1.031644 | 0.558683 |
| 22 | 1.02087 | 1.062083 | 0.004752 | 16 | 1.240457 | 0.551393 |
| 23 | 1.008333 | 1.060597 | 0.002618 | 10 | 1.025091 | 0.550989 |
| 24 | 1.011458 | 1.033885 | 0.00143 | 16 | 1.192012 | 0.54625 |
| 25 | 1.004537 | 1.033076 | 0.000781 | 11 | 1.020709 | 0.546022 |
| 26 | 1.006248 | 1.018454 | 0.000425 | 16 | 1.158425 | 0.544808 |
| 27 | 1.002466 | 1.018012 | 0.000232 | 11 | 1.017576 | 0.544658 |
| 28 | 1.003405 | 1.010079 | 0.000127 | 16 | 1.13371 | 0.546164 |
| 29 | 1.001346 | 1.009835 | 6.9e-05 | 11 | 1.015246 | 0.546093 |
| 30 | 1.001858 | 1.005495 | 3.8e-05 | 17 | 1.116479 | 0.545305 |
| 31 | 1.000734 | 1.005362 | 2.1e-05 | 11 | 1.013466 | 0.545228 |
| 32 | 1.001012 | 1.002988 | 1.1e-05 | 15 | 1.103411 | 0.543871 |
| 33 | 1.000399 | 1.002916 | 6,00E-06 | 11 | 1.012053 | 0.543871 |

всего вычислено 434 значения F.

**Метод с постоянным шагом.**

При использовании метода с постоянным шагом для заданной функции F в рассматриваемых точках были замечены проблемы в работе программы - ошибка переполнения. Сложно говорить о причинах этих проблем не зная особенностей реализации программы, но вероятно при слишком больших размерах шага начинают возникать проблемы со сходимостью: следующая точка, получаемая в результате вычитания производной функции умноженной на размер шага, оказывается дальше от центра (искомой точки (1;1)). На следующем шаге происходит умножение на еще большую производную, и точка отскакивает еще дальше, как бы перепрыгивая каждый раз через центр.

Величина шага: 0.005

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | 2.98 | 1.63 | 91.7723 | 1 |  |  |
| 51 | 1.101757 | 1.641401 | 0.286329 | 1 |  |  |
| 101 | 1.071401 | 1.457771 | 0.147001 | 1 |  |  |
| 151 | 1.050236 | 1.325397 | 0.074699 | 1 |  |  |
| 201 | 1.035342 | 1.230654 | 0.037683 | 1 |  |  |
| 251 | 1.024867 | 1.163172 | 0.018912 | 1 |  |  |
| 301 | 1.017499 | 1.115272 | 0.009457 | 1 |  |  |
| 351 | 1.012315 | 1.081352 | 0.004717 | 1 |  |  |
| 401 | 1.008668 | 1.057374 | 0.002348 | 1 |  |  |
| 451 | 1.006102 | 1.040443 | 0.001168 | 1 |  |  |
| 501 | 1.004295 | 1.028499 | 0.00058 | 1 |  |  |
| 551 | 1.003024 | 1.020077 | 0.000288 | 1 |  |  |
| 601 | 1.002129 | 1.014142 | 0.000143 | 1 |  |  |
| 651 | 1.001499 | 1.00996 | 7.1e-05 | 1 |  |  |
| 701 | 1.001055 | 1.007014 | 3.5e-05 | 1 |  |  |
| 751 | 1.000743 | 1.004939 | 1.7e-05 | 1 |  |  |
| 780 | 1.000606 | 1.00403 | 1.2e-05 | 1 |  |  |
| 781 | 1.000602 | 1.004002 | 1.1e-05 | 1 | 1.001266 | 0.986065 |
| 782 | 1.000598 | 1.003974 | 1.1e-05 | 1 | 1.001273 | 0.986069 |
| 783 | 1.000594 | 1.003946 | 1.1e-05 | 1 | 1.00128 | 0.986067 |
| 784 | 1.000589 | 1.003918 | 1.1e-05 | 1 | 1.001294 | 0.986068 |
| 785 | 1.000585 | 1.003891 | 1.1e-05 | 1 | 1.00125 | 0.986071 |
| 786 | 1.000581 | 1.003864 | 1.1e-05 | 1 | 1.001257 | 0.986069 |
| 787 | 1.000577 | 1.003837 | 1.1e-05 | 1 | 1.001264 | 0.986068 |
| 788 | 1.000573 | 1.00381 | 1,00E-05 | 1 | 1.001272 | 0.986071 |
| 789 | 1.000569 | 1.003783 | 1,00E-05 | 1 | 1.001279 | 0.986067 |
| 790 | 1.000565 | 1.003757 | 1,00E-05 | 1 | 1.00124 | 0.986066 |
| 791 | 1.000561 | 1.003731 | 1,00E-05 | 1 | 1.001247 | 0.986067 |

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | 1.18 | 9.91 | 72.87351 | 1 |  |  |
| 51 | 2.326965 | 8.160794 | 25.149029 | 1 |  |  |
| 101 | 2.087054 | 6.848271 | 18.029304 | 1 |  |  |
| 151 | 1.862875 | 5.671869 | 12.292423 | 1 |  |  |
| 201 | 1.663093 | апр.84 | 7.940812 | 1 |  |  |
| 251 | 1.494671 | 3.787765 | 4.86105 | 1 |  |  |
| 301 | 1.360402 | 3.089178 | 2.832739 | 1 |  |  |
| 351 | 1.258339 | 2.54059 | 1.58357 | 1 |  |  |
| 401 | 1.183379 | 2.121775 | 0.856682 | 1 |  |  |
| 451 | 1.129498 | 1.809091 | 0.452133 | 1 |  |  |
| 501 | 1.091225 | 1.579522 | 0.234346 | 1 |  |  |
| 551 | 1.064199 | 1.413019 | 0.119895 | 1 |  |  |
| 601 | 1.045167 | 1.293307 | 0.060775 | 1 |  |  |
| 651 | 1.031777 | 1.207767 | 0.030605 | 1 |  |  |
| 701 | 1.022359 | 1.146911 | 0.015341 | 1 |  |  |
| 751 | 1.015735 | 1.103749 | 0.007664 | 1 |  |  |
| 801 | 1.011074 | 1.073203 | 0.00382 | 1 |  |  |
| 851 | 1.007795 | 1.051618 | 0.001901 | 1 |  |  |
| 901 | 1.005487 | 1.036382 | 0.000945 | 1 |  |  |
| 951 | 1.003863 | 1.025635 | 0.000469 | 1 |  |  |
| 1001 | 1.002719 | 1.018058 | 0.000233 | 1 |  |  |
| 1051 | 1.001915 | 1.012719 | 0.000116 | 1 |  |  |
| 1101 | 1.001348 | 1.008958 | 5.7e-05 | 1 |  |  |
| 1151 | 1.000949 | 1.006308 | 2.8e-05 | 1 |  |  |
| 1201 | 1.000668 | 1.004442 | 1.4e-05 | 1 |  |  |
| 1214 | 1.00061 | 1.004055 | 1.2e-05 | 1 |  |  |
| 1215 | 1.000606 | 1.004026 | 1.2e-05 | 1 | 1.001303 | 0.986074 |
| 1216 | 1.000601 | 1.003998 | 1.1e-05 | 1 | 1.001273 | 0.986067 |
| 1217 | 1.000597 | 1.00397 | 1.1e-05 | 1 | 1.001274 | 0.986071 |
| 1218 | 1.000593 | 1.003943 | 1.1e-05 | 1 | 1.001236 | 0.986061 |
| 1219 | 1.000589 | 1.003915 | 1.1e-05 | 1 | 1.001289 | 0.986071 |
| 1220 | 1.000585 | 1.003888 | 1.1e-05 | 1 | 1.001251 | 0.986075 |
| 1221 | 1.000581 | 1.00386 | 1.1e-05 | 1 | 1.001303 | 0.986063 |
| 1222 | 1.000577 | 1.003833 | 1.1e-05 | 1 | 1.001265 | 0.986073 |
| 1223 | 1.000573 | 1.003807 | 1,00E-05 | 1 | 1.001226 | 0.986066 |
| 1224 | 1.000569 | 1.00378 | 1,00E-05 | 1 | 1.00128 | 0.986062 |
| 1225 | 1.000565 | 1.003754 | 1,00E-05 | 1 | 1.00124 | 0.986071 |
| 1226 | 1.000561 | 1.003727 | 1,00E-05 | 1 | 1.001295 | 0.986073 |

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | -2.433179 | 7.573696 | 120.6006939 | 1 |  |  |
| 51 | 1.731721 | 5.207377 | 10.2317159 | 1 |  |  |
| 101 | 1.584466 | 4.247518 | 6.4331249 | 1 |  |  |
| 151 | 1.431101 | 3.459338 | 3.8502146 | 1 |  |  |
| 201 | 1.311554 | 2.829155 | 2.2004979 | 1 |  |  |
| 251 | 1.222207 | 2.340761 | 1.2111189 | 1 |  |  |
| 301 | 1.1573 | 1.971831 | 0.6474738 | 1 |  |  |
| 351 | 1.110934 | 1.698597 | 0.3387516 | 1 |  |  |
| 401 | 1.078103 | 1.49917 | 0.1744781 | 1 |  |  |
| 451 | 1.054955 | 1.355139 | 0.0888658 | 1 |  |  |
| 501 | 1.038663 | 1.251894 | 0.0449027 | 1 |  |  |
| 551 | 1.027202 | 1.178277 | 0.0225613 | 1 |  |  |
| 601 | 1.019141 | 1.125982 | 0.0112909 | 1 |  |  |
| 651 | 1.013471 | 1.088931 | 0.0056348 | 1 |  |  |
| 701 | 1.009481 | 1.062728 | 0.0028065 | 1 |  |  |
| 751 | 1.006674 | 1.044222 | 0.0013959 | 1 |  |  |
| 801 | 1.004698 | 1.031164 | 0.0006936 | 1 |  |  |
| 851 | 1.003308 | 1.021956 | 0.0003444 | 1 |  |  |
| 901 | 1.002329 | 1.015466 | 0.0001709 | 1 |  |  |
| 951 | 1.001639 | 1.010893 | 8.48e-05 | 1 |  |  |
| 1001 | 1.001154 | 1.007671 | 4.21e-05 | 1 |  |  |
| 1051 | 1.000813 | 1.005402 | 2.09e-05 | 1 |  |  |
| 1101 | 1.000572 | 1.003804 | 1.03e-05 | 1 |  |  |
| 1091 | 1.000614 | 1.00408 | 1.19e-05 | 1 |  |  |
| 1092 | 1.000609 | 1.004052 | 1.17e-05 | 1 | 1.0012594 | 0.9860702 |
| 1093 | 1.000605 | 1.004023 | 1.16e-05 | 1 | 1.0013042 | 0.9860693 |
| 1094 | 1.000601 | 1.003995 | 1.14e-05 | 1 | 1.0012674 | 0.9860713 |
| 1095 | 1.000597 | 1.003967 | 1.13e-05 | 1 | 1.0012747 | 0.9860673 |
| 1096 | 1.000593 | 1.00394 | 1.11e-05 | 1 | 1.0012371 | 0.9860659 |
| 1097 | 1.000588 | 1.003912 | 1.09e-05 | 1 | 1.0012961 | 0.9860673 |
| 1098 | 1.000584 | 1.003885 | 1.08e-05 | 1 | 1.0012514 | 0.9860715 |
| 1099 | 1.00058 | 1.003857 | 1.06e-05 | 1 | 1.0013043 | 0.9860694 |
| 1100 | 1.000576 | 1.003831 | 1.05e-05 | 1 | 1.0012201 | 0.98607 |
| 1101 | 1.000572 | 1.003804 | 1.03e-05 | 1 | 1.0012732 | 0.9860638 |
| 1102 | 1.000568 | 1.003777 | 1.02e-05 | 1 | 1.0012806 | 0.9860699 |
| 1103 | 1.000564 | 1.003751 | 1.01e-05 | 1 | 1.0012413 | 0.9860692 |
| 1104 | 1.00056 | 1.003725 | 9.9e-06 | 1 | 1.0012484 | 0.9860613 |
| 1105 | 1.000556 | 1.003698 | 9.8e-06 | 1 | 1.0013029 | 0.986076 |

Величина шага: 0.001

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | -5.804 | 1.126 | 1523.1248501 | 1 |  |  |
| 51 | -0.459721 | 1.434678 | 22.8044145 | 1 |  |  |
| 101 | 0.489133 | 1.305693 | 3.7471443 | 1 |  |  |
| 151 | 0.877195 | 1.231502 | 0.3642841 | 1 |  |  |
| 201 | 0.991289 | 1.199654 | 0.0478472 | 1 |  |  |
| 251 | 1.018483 | 1.182205 | 0.0244114 | 1 |  |  |
| 301 | 1.02358 | 1.169052 | 0.0202825 | 1 |  |  |
| 351 | 1.023479 | 1.15752 | 0.0176149 | 1 |  |  |
| 401 | 1.022241 | 1.146927 | 0.0153406 | 1 |  |  |
| 451 | 1.020818 | 1.137079 | 0.0133606 | 1 |  |  |
| 501 | 1.019428 | 1.127893 | 0.011635 | 1 |  |  |
| 551 | 1.018118 | 1.11932 | 0.0101311 | 1 |  |  |
| 601 | 1.016893 | 1.111317 | 0.0088206 | 1 |  |  |
| 651 | 1.01575 | 1.103848 | 0.007679 | 1 |  |  |
| 701 | 1.014684 | 1.096876 | 0.0066845 | 1 |  |  |
| 751 | 1.013691 | 1.090369 | 0.0058183 | 1 |  |  |
| 801 | 1.012764 | 1.084297 | 0.0050639 | 1 |  |  |
| 851 | 1.011901 | 1.078631 | 0.004407 | 1 |  |  |
| 901 | 1.011096 | 1.073343 | 0.0038351 | 1 |  |  |
| 951 | 1.010345 | 1.06841 | 0.0033372 | 1 |  |  |
| 1001 | 1.009645 | 1.063807 | 0.0029037 | 1 |  |  |
| 1051 | 1.008993 | 1.059512 | 0.0025264 | 1 |  |  |
| 1101 | 1.008385 | 1.055505 | 0.0021981 | 1 |  |  |
| 1151 | 1.007818 | 1.051767 | 0.0019123 | 1 |  |  |
| 1201 | 1.007289 | 1.04828 | 0.0016636 | 1 |  |  |
| 1251 | 1.006796 | 1.045027 | 0.0014471 | 1 |  |  |
| 1301 | 1.006336 | 1.041993 | 0.0012588 | 1 |  |  |
| 1351 | 1.005908 | 1.039163 | 0.001095 | 1 |  |  |
| 1401 | 1.005508 | 1.036523 | 0.0009524 | 1 |  |  |
| 1451 | 1.005136 | 1.03406 | 0.0008284 | 1 |  |  |
| 1501 | 1.004789 | 1.031763 | 0.0007205 | 1 |  |  |
| 1551 | 1.004465 | 1.029621 | 0.0006266 | 1 |  |  |
| 1601 | 1.004163 | 1.027623 | 0.000545 | 1 |  |  |
| 1651 | 1.003882 | 1.025759 | 0.000474 | 1 |  |  |
| 1701 | 1.003619 | 1.024021 | 0.0004122 | 1 |  |  |
| 1751 | 1.003375 | 1.0224 | 0.0003585 | 1 |  |  |
| 1801 | 1.003146 | 1.020888 | 0.0003117 | 1 |  |  |
| 1851 | 1.002934 | 1.019479 | 0.0002711 | 1 |  |  |
| 1901 | 1.002735 | 1.018164 | 0.0002357 | 1 |  |  |
| 1951 | 1.00255 | 1.016938 | 0.000205 | 1 |  |  |
| 2001 | 1.002378 | 1.015794 | 0.0001783 | 1 |  |  |
| 2051 | 1.002217 | 1.014728 | 0.000155 | 1 |  |  |
| 2101 | 1.002067 | 1.013733 | 0.0001348 | 1 |  |  |
| 2151 | 1.001928 | 1.012806 | 0.0001172 | 1 |  |  |
| 2201 | 1.001797 | 1.011941 | 0.0001019 | 1 |  |  |
| 2251 | 1.001676 | 1.011135 | 8.86e-05 | 1 |  |  |
| 2301 | 1.001563 | 1.010383 | 7.71e-05 | 1 |  |  |
| 2351 | 1.001457 | 1.009682 | 6.7e-05 | 1 |  |  |
| 2401 | 1.001359 | 1.009028 | 5.83e-05 | 1 |  |  |
| 2451 | 1.001267 | 1.008418 | 5.07e-05 | 1 |  |  |
| 2501 | 1.001181 | 1.007849 | 4.4e-05 | 1 |  |  |
| 2551 | 1.001101 | 1.007319 | 3.83e-05 | 1 |  |  |
| 2601 | 1.001027 | 1.006825 | 3.33e-05 | 1 |  |  |
| 2651 | 1.000957 | 1.006364 | 2.9e-05 | 1 |  |  |
| 2701 | 1.000893 | 1.005934 | 2.52e-05 | 1 |  |  |
| 2751 | 1.000832 | 1.005533 | 2.19e-05 | 1 |  |  |
| 2801 | 1.000776 | 1.005159 | 1.9e-05 | 1 |  |  |
| 2851 | 1.000724 | 1.004811 | 1.65e-05 | 1 |  |  |
| 2901 | 1.000675 | 1.004486 | 1.44e-05 | 1 |  |  |
| 2951 | 1.000629 | 1.004182 | 1.25e-05 | 1 |  |  |
| 3001 | 1.000587 | 1.0039 | 1.09e-05 | 1 |  |  |
| 3018 | 1.000573 | 1.003808 | 1.04e-05 | 1 |  |  |
| 3019 | 1.000572 | 1.003803 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002381 | 0.9972032 |
| 3020 | 1.000571 | 1.003798 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002383 | 0.997205 |
| 3021 | 1.00057 | 1.003792 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002849 | 0.9972069 |
| 3022 | 1.00057 | 1.003787 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002319 | 0.9972088 |
| 3023 | 1.000569 | 1.003782 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002391 | 0.997201 |
| 3024 | 1.000568 | 1.003776 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002859 | 0.9972029 |
| 3025 | 1.000567 | 1.003771 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002397 | 0.9972048 |
| 3026 | 1.000566 | 1.003766 | 1.01e-05 | 1 | 1.00024 | 0.9972068 |
| 3027 | 1.000566 | 1.003761 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002332 | 0.9972089 |
| 3028 | 1.000565 | 1.003755 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002872 | 0.9972011 |
| 3029 | 1.000564 | 1.00375 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002408 | 0.997213 |
| 3030 | 1.000563 | 1.003745 | 1e-05 | 1 | 1.0002411 | 0.9972053 |
| 3031 | 1.000562 | 1.00374 | 1e-05 | 1 | 1.0002413 | 0.9972074 |

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | 1.036 | 9.982 | 79.377967 | 1 |  |  |
| 101 | 2.471816 | 9.040068 | 30.248458 | 1 |  |  |
| 201 | 2.381755 | 8.470165 | 26.9179615 | 1 |  |  |
| 301 | 2.283794 | 7.919825 | 23.7934787 | 1 |  |  |
| 401 | 2.187248 | 7.388741 | 20.8799728 | 1 |  |  |
| 501 | 2.092638 | 6.87816 | 18.183712 | 1 |  |  |
| 601 | 2.000505 | 6.389318 | 15.7092917 | 1 |  |  |
| 701 | 1.911416 | 5.923392 | 13.4591522 | 1 |  |  |
| 801 | 1.82594 | 5.481463 | 11.4331236 | 1 |  |  |
| 901 | 1.744619 | 5.064459 | 9.6280588 | 1 |  |  |
| 1001 | 1.667939 | 4.673104 | 8.0376227 | 1 |  |  |
| 1101 | 1.596298 | 4.307877 | 6.6522929 | 1 |  |  |
| 1201 | 1.529982 | 3.968972 | 5.4596064 | 1 |  |  |
| 1301 | 1.469147 | 3.656276 | 4.4446421 | 1 |  |  |
| 1401 | 1.413815 | 3.36937 | 3.5906908 | 1 |  |  |
| 1501 | 1.363884 | 3.107542 | 2.8800298 | 1 |  |  |
| 1601 | 1.319146 | 2.869821 | 2.294706 | 1 |  |  |
| 1701 | 1.279307 | 2.655016 | 1.8172415 | 1 |  |  |
| 1801 | 1.244016 | 2.461776 | 1.4311994 | 1 |  |  |
| 1901 | 1.212892 | 2.288634 | 1.12158 | 1 |  |  |
| 2001 | 1.185539 | 2.134065 | 0.8750495 | 1 |  |  |
| 2101 | 1.161568 | 1.996525 | 0.6800204 | 1 |  |  |
| 2201 | 1.140609 | 1.874495 | 0.5266183 | 1 |  |  |
| 2301 | 1.122314 | 1.766503 | 0.4065691 | 1 |  |  |
| 2401 | 1.106365 | 1.67115 | 0.3130395 | 1 |  |  |
| 2501 | 1.092475 | 1.587125 | 0.2404556 | 1 |  |  |
| 2601 | 1.080386 | 1.51321 | 0.1843189 | 1 |  |  |
| 2701 | 1.069872 | 1.448289 | 0.1410321 | 1 |  |  |
| 2801 | 1.060729 | 1.391342 | 0.1077405 | 1 |  |  |
| 2901 | 1.05278 | 1.341448 | 0.0821941 | 1 |  |  |
| 3001 | 1.045872 | 1.297778 | 0.0626297 | 1 |  |  |
| 3101 | 1.039868 | 1.259588 | 0.0476721 | 1 |  |  |
| 3201 | 1.03465 | 1.226217 | 0.0362537 | 1 |  |  |
| 3301 | 1.030116 | 1.197075 | 0.0275484 | 1 |  |  |
| 3401 | 1.026176 | 1.171642 | 0.0209189 | 1 |  |  |
| 3501 | 1.022752 | 1.149457 | 0.0158753 | 1 |  |  |
| 3601 | 1.019776 | 1.130112 | 0.0120414 | 1 |  |  |
| 3701 | 1.017189 | 1.113252 | 0.0091292 | 1 |  |  |
| 3801 | 1.014942 | 1.098562 | 0.0069186 | 1 |  |  |
| 3901 | 1.012988 | 1.085765 | 0.0052415 | 1 |  |  |
| 4001 | 1.01129 | 1.074622 | 0.0039697 | 1 |  |  |
| 4101 | 1.009814 | 1.06492 | 0.0030058 | 1 |  |  |
| 4201 | 1.008532 | 1.056474 | 0.0022754 | 1 |  |  |
| 4301 | 1.007417 | 1.049123 | 0.0017221 | 1 |  |  |
| 4401 | 1.006448 | 1.042727 | 0.0013032 | 1 |  |  |
| 4501 | 1.005605 | 1.037161 | 0.000986 | 1 |  |  |
| 4601 | 1.004873 | 1.032318 | 0.0007459 | 1 |  |  |
| 4701 | 1.004236 | 1.028106 | 0.0005642 | 1 |  |  |
| 4801 | 1.003683 | 1.024441 | 0.0004267 | 1 |  |  |
| 4901 | 1.003202 | 1.021254 | 0.0003227 | 1 |  |  |
| 5001 | 1.002783 | 1.018482 | 0.0002441 | 1 |  |  |
| 5101 | 1.00242 | 1.016071 | 0.0001846 | 1 |  |  |
| 5201 | 1.002104 | 1.013974 | 0.0001396 | 1 |  |  |
| 5301 | 1.001829 | 1.01215 | 0.0001055 | 1 |  |  |
| 5401 | 1.00159 | 1.010565 | 7.98e-05 | 1 |  |  |
| 5501 | 1.001382 | 1.009186 | 6.03e-05 | 1 |  |  |
| 5601 | 1.001202 | 1.007987 | 4.56e-05 | 1 |  |  |
| 5701 | 1.001045 | 1.006944 | 3.45e-05 | 1 |  |  |
| 5801 | 1.000908 | 1.006038 | 2.61e-05 | 1 |  |  |
| 5901 | 1.00079 | 1.005249 | 1.97e-05 | 1 |  |  |
| 6001 | 1.000687 | 1.004564 | 1.49e-05 | 1 |  |  |
| 6101 | 1.000597 | 1.003968 | 1.13e-05 | 1 |  |  |
| 6132 | 1.000572 | 1.0038 | 1.03e-05 | 1 |  |  |
| 6133 | 1.000571 | 1.003794 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002848 | 0.9972101 |
| 6134 | 1.00057 | 1.003789 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002388 | 0.9972023 |
| 6135 | 1.000569 | 1.003784 | 1.02e-05 | 1 | 1.000239 | 0.9972041 |
| 6136 | 1.000568 | 1.003779 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002393 | 0.9972061 |
| 6137 | 1.000568 | 1.003773 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002791 | 0.997208 |
| 6138 | 1.000567 | 1.003768 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002399 | 0.9972101 |
| 6139 | 1.000566 | 1.003763 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002401 | 0.9972022 |
| 6140 | 1.000565 | 1.003757 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002871 | 0.9972043 |
| 6141 | 1.000564 | 1.003752 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002407 | 0.9972063 |
| 6142 | 1.000564 | 1.003747 | 1e-05 | 1 | 1.0002339 | 0.9972085 |
| 6143 | 1.000563 | 1.003742 | 1e-05 | 1 | 1.0002412 | 0.9972006 |
| 6144 | 1.000562 | 1.003737 | 1e-05 | 1 | 1.0002415 | 0.9972128 |

Начальное приближение

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Шаг** |  |  |  | **Число вычислений F** | **Оценка порядка сходимости** | **Оценка скорости сходимости (** |
| 1 | -4.774636 | 7.402739 | 570.4519686 | 1 |  |  |
| 101 | -0.596894 | 6.668023 | 65.3387762 | 1 |  |  |
| 201 | 1.317855 | 5.546029 | 15.5209801 | 1 |  |  |
| 301 | 1.723209 | 5.028043 | 9.4681218 | 1 |  |  |
| 401 | 1.660428 | 4.63657 | 7.8943569 | 1 |  |  |
| 501 | 1.589616 | 4.273831 | 6.5283127 | 1 |  |  |
| 601 | 1.523836 | 3.937478 | 5.3535638 | 1 |  |  |
| 701 | 1.463536 | 3.627308 | 4.3549818 | 1 |  |  |
| 801 | 1.408734 | 3.342872 | 3.5157242 | 1 |  |  |
| 901 | 1.359319 | 3.083431 | 2.8180124 | 1 |  |  |
| 1001 | 1.31507 | 2.847988 | 2.2439103 | 1 |  |  |
| 1101 | 1.275688 | 2.635338 | 1.7760189 | 1 |  |  |
| 1201 | 1.240819 | 2.444114 | 1.398026 | 1 |  |  |
| 1301 | 1.210078 | 2.272842 | 1.0950865 | 1 |  |  |
| 1401 | 1.18307 | 2.119994 | 0.8540344 | 1 |  |  |
| 1501 | 1.159408 | 1.984026 | 0.6634516 | 1 |  |  |
| 1601 | 1.138722 | 1.863421 | 0.5136249 | 1 |  |  |
| 1701 | 1.120668 | 1.756716 | 0.3964275 | 1 |  |  |
| 1801 | 1.104931 | 1.662519 | 0.3051565 | 1 |  |  |
| 1901 | 1.091226 | 1.579527 | 0.2343503 | 1 |  |  |
| 2001 | 1.0793 | 1.506532 | 0.1796054 | 1 |  |  |
| 2101 | 1.068927 | 1.442428 | 0.1374031 | 1 |  |  |
| 2201 | 1.059907 | 1.386204 | 0.1049532 | 1 |  |  |
| 2301 | 1.052067 | 1.336949 | 0.0800578 | 1 |  |  |
| 2401 | 1.045252 | 1.293842 | 0.0609953 | 1 |  |  |
| 2501 | 1.039329 | 1.256148 | 0.0464237 | 1 |  |  |
| 2601 | 1.034182 | 1.223212 | 0.0353014 | 1 |  |  |
| 2701 | 1.029709 | 1.194452 | 0.0268228 | 1 |  |  |
| 2801 | 1.025822 | 1.169353 | 0.0203667 | 1 |  |  |
| 2901 | 1.022444 | 1.147461 | 0.0154554 | 1 |  |  |
| 3001 | 1.019508 | 1.128372 | 0.0117223 | 1 |  |  |
| 3101 | 1.016957 | 1.111736 | 0.008887 | 1 |  |  |
| 3201 | 1.01474 | 1.097241 | 0.0067348 | 1 |  |  |
| 3301 | 1.012813 | 1.084615 | 0.0051021 | 1 |  |  |
| 3401 | 1.011138 | 1.07362 | 0.003864 | 1 |  |  |
| 3501 | 1.009682 | 1.064048 | 0.0029257 | 1 |  |  |
| 3601 | 1.008417 | 1.055715 | 0.0022147 | 1 |  |  |
| 3701 | 1.007317 | 1.048463 | 0.0016761 | 1 |  |  |
| 3801 | 1.006361 | 1.042152 | 0.0012684 | 1 |  |  |
| 3901 | 1.005529 | 1.036661 | 0.0009596 | 1 |  |  |
| 4001 | 1.004807 | 1.031883 | 0.000726 | 1 |  |  |
| 4101 | 1.004179 | 1.027727 | 0.0005491 | 1 |  |  |
| 4201 | 1.003633 | 1.024112 | 0.0004153 | 1 |  |  |
| 4301 | 1.003158 | 1.020968 | 0.0003141 | 1 |  |  |
| 4401 | 1.002746 | 1.018233 | 0.0002375 | 1 |  |  |
| 4501 | 1.002387 | 1.015854 | 0.0001796 | 1 |  |  |
| 4601 | 1.002075 | 1.013785 | 0.0001358 | 1 |  |  |
| 4701 | 1.001804 | 1.011987 | 0.0001027 | 1 |  |  |
| 4801 | 1.001569 | 1.010422 | 7.76e-05 | 1 |  |  |
| 4901 | 1.001364 | 1.009062 | 5.87e-05 | 1 |  |  |
| 5001 | 1.001186 | 1.007879 | 4.44e-05 | 1 |  |  |
| 5101 | 1.001031 | 1.006851 | 3.35e-05 | 1 |  |  |
| 5201 | 1.000896 | 1.005956 | 2.54e-05 | 1 |  |  |
| 5301 | 1.000779 | 1.005179 | 1.92e-05 | 1 |  |  |
| 5401 | 1.000677 | 1.004503 | 1.45e-05 | 1 |  |  |
| 5501 | 1.000589 | 1.003915 | 1.1e-05 | 1 |  |  |
| 5513 | 1.000579 | 1.003849 | 1.06e-05 | 1 |  |  |
| 5514 | 1.000578 | 1.003844 | 1.06e-05 | 1 | 1.000236 | 0.9972062 |
| 5515 | 1.000577 | 1.003839 | 1.05e-05 | 1 | 1.0002362 | 0.9972078 |
| 5516 | 1.000577 | 1.003833 | 1.05e-05 | 1 | 1.0002755 | 0.9972 |
| 5517 | 1.000576 | 1.003828 | 1.05e-05 | 1 | 1.0002368 | 0.9972112 |
| 5518 | 1.000575 | 1.003823 | 1.04e-05 | 1 | 1.000237 | 0.9972034 |
| 5519 | 1.000574 | 1.003817 | 1.04e-05 | 1 | 1.0002834 | 0.9972051 |
| 5520 | 1.000573 | 1.003812 | 1.04e-05 | 1 | 1.0002376 | 0.9972069 |
| 5521 | 1.000573 | 1.003807 | 1.04e-05 | 1 | 1.0002309 | 0.9972087 |
| 5522 | 1.000572 | 1.003801 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002844 | 0.9972009 |
| 5523 | 1.000571 | 1.003796 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002384 | 0.9972124 |
| 5524 | 1.00057 | 1.003791 | 1.03e-05 | 1 | 1.0002387 | 0.9972046 |
| 5525 | 1.000569 | 1.003785 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002854 | 0.9972065 |
| 5526 | 1.000569 | 1.00378 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002323 | 0.9971986 |
| 5527 | 1.000568 | 1.003775 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002395 | 0.9972103 |
| 5528 | 1.000567 | 1.00377 | 1.02e-05 | 1 | 1.0002398 | 0.9972025 |
| 5529 | 1.000566 | 1.003764 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002867 | 0.9972045 |
| 5530 | 1.000565 | 1.003759 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002403 | 0.9972066 |
| 5531 | 1.000565 | 1.003754 | 1.01e-05 | 1 | 1.0002336 | 0.9972086 |
| 5532 | 1.000564 | 1.003749 | 1,00E-05 | 1 | 1.0002409 | 0.9972008 |
| 5533 | 1.000563 | 1.003743 | 1e-05 | 1 | 1.000288 | 0.9972129 |
| 5534 | 1.000562 | 1.003738 | 1,00E-05 | 1 | 1.0002414 | 0.9972051 |

# Оценка скорости и порядка сходимости методов

При любых начальных точках оценочное значение порядка сходимости метода наискорейшего спуска близки к единице, что подтверждает теоретические сведения. Таким образом, порядок сходимости метода наискорейшего спуска – единица.

Во всех случаях запуска метода наискорейшего спуска выполняется соотношение . Таким образом, метод наискорейшего спуска сходится с линейной скоростью.

При всех использованных исходных данных исследование метода с постоянным шагом показало, что порядок его сходимости равен единице.

Во всех случаях запуска метода с постоянным шагом выполнилось соотношение . Это говорит о том, что метод сходится с линейной скоростью.

Ниже приведена сводная таблица по проведенным исследованиям. Для метода наискорейшего спуска показаны количество шагов и количество вычислений F. Для метода с постоянным шагом эти значения одинаковы, поэтому приведено только одно число.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Начальное приближение** | **Метод наискорейшего спуска** | | **Метод с постоянным шагом (0.005)** | **Метод с постоянным шагом (0.001)** |
| Шагов | Вычислений F |
| -8; 1 | 53 | 643 | 791 | 3031 |
| 1; 10 | 30 | 412 | 1226 | 6144 |
| -5.36; 7.36 | 33 | 434 | 1105 | 5534 |

# Выводы

Количество шагов метода с постоянным шагом значительно зависит от точки начального приближения. В нашем случае точки расположены на одинаковом расстоянии от точки минимума, однако наблюдается почти двукратная разница в количестве шагов для разных точек. При этом можно заметить (глядя на изолинии функции F), что методу с постоянным шагом требуется тем меньше шагов, чем больше норма градиента минимизируемой функции.

Также наблюдается сильная зависимость метода с постоянным шагом от длины шага. Чем больше длина шага, тем быстрее сходится метод, однако есть вероятность того, что метод не сойдется при слишком большом размере шага (в рассматриваемом случае это ~0.01).

**Сравнение метода с постоянным шагом и метода наискорейшего спуска.**

Отметим основные различия:

1. В общем случае метод наискорейшего спуска сходится за значительно меньшее число шагов, чем метод с постоянным. Собственно, в проводимых исследованиях не удалось получить случай, когда метод с постоянным шагом оказался бы эффективнее.

2. На каждом шаге (и в целом) метод наискорейшего спуска требует меньшее количество вычислений, чем метод с постоянным шагом.

Таким образом метод наискорейшего спуска показывает в большинстве случаем большую эффективность в сравнении с методом с постоянным шагом, хотя второй более предсказуем.